Eta-Zahlen: Struktur und effektive Konsistenzkodierung

Algebraische Struktur, berechenbare Eigenschaften und die Grenzen effektiver Schalterverfahren

Dieter Eigler

Oktober 2026

Zusammenfassung

Ausgehend von einer berechenbaren reellen Zahl, deren Binärentwicklung bei Auffinden eines Widerspruchsbeweises in einer Theorie T dauerhaft auf Nullen umschaltet, untersuchen wir eine affine Klasse von Eta-Zahlen und ihre rationale lineare Hülle. Die Klasse ist abzählbar unendlich und dicht in $\mathbb{R}$; die Hülle ist in beiden Konsistenzfällen ein Körper, dessen Dimension über $\mathbb{Q}$ bei Konsistenz zwei und bei Inkonsistenz eins beträgt. Topologisch sind die Räume dagegen gleichartig. Ein allgemeiner Kodierungssatz und seine Umkehrung im effektiv stetigen Schaltermodell verbinden die Konstruktion mit einer genau bezeichneten Grenzpunktbedingung. Anschließend werden Nullheit, Rationalität und Gleichheit als Beispiele behandelt. Der abschließende Vergleich mit ganzen Zahlen zeigt, warum *Definition*, *individuelle Berechenbarkeit* und *uniforme Berechnung aus einer Theoriebeschreibung* getrennt werden müssen. Die Sätze über Zahlenwerte gelten in der Metatheorie; interne Beweisbarkeitsaussagen werden nur unter ausdrücklich genannten Formalisierungs- und Korrektheitsvoraussetzungen getroffen. Ein maschinell zertifizierter Beweis liegt nicht vor.

Hinweis zur KI-Unterstützung. Dieser Text wurde im Dialog mit OpenAI ChatGPT entwickelt. Die Unterstützung betraf die mathematische Exploration, die Formulierung und grafische Darstellung der Ergebnisse sowie deren kritische Überprüfung. Die Verantwortung für die endgültige fachliche Bewertung liegt beim Autor. Eine maschinelle Formalisierung der Beweise liegt nicht vor.

Inhaltsverzeichnis

1 Konstruktion und grundlegende Sätze **2**
- 1.1 Eine Zahl, deren Rationalität von Konsistenz abhängt . . . 2
- 1.2 Eta-Zahlen und ihr linearer Raum . . . 3

2 Algebraische Struktur und vier Grundrechenarten **3**
- 2.1 Der Dimensionssatz . . . 3
- 2.2 Ring oder Körper? Eine unerwartet starke Antwort . . . 4
- 2.3 Abhängigkeit von der Referenzzahl . . . 4

3 Topologie: gleiche Nähe trotz verschiedener Dimension **5**

4 Ein allgemeiner Kodierungssatz **5**
- 4.1 Das Prinzip: ein Grenzpunkt mit anderer Eigenschaft . . . 5
- 4.2 Welche Eigenschaften erfüllt das Kriterium? . . . 6
- 4.3 Wann ist die Eigenschaft innerhalb der Theorie unentscheidbar? . . . 7

5 Charakterisierung des effektiven Schaltermodells **7**
5.1 Modell und Geltungsbereich 7
5.2 Die hinreichende Richtung und ein exaktes Kriterium 8
5.3 Ein lokales Unmöglichkeitskriterium 9
5.4 Die zusätzliche Grenze interner Beweisbarkeit 9

6 Eigenschaften berechenbarer reeller Zahlen **9**
6.1 Berechenbare Werte und unentscheidbare Eigenschaften 9
6.2 Welche Eigenschaften lassen sich kodieren? 10
6.3 Ein Satz der Form “Nicht alle berechenbaren Zahlen ...” 10

7 Warum die ganzzahlige Analogie scheitert **11**
7.1 Primzahl, Parität und Teilbarkeit 11

8 Ergebnis, Beweisgrenzen und Einordnung **11**

Leseführung. Zuerst definieren wir Eta-Zahlen und ihren algebraischen Raum; dessen Dimension und Körperstruktur werden dann bewiesen und von der Topologie abgegrenzt. Anschließend isolieren wir das allgemeine effektive Kodierungsprinzip und charakterisieren seine Schalterform. Konkrete Zahleneigenschaften und die Grenze bei ganzzahligen Zielwerten folgen erst danach. Aussagen über Beweisbarkeit innerhalb einer Theorie bilden eine gesonderte Ebene.

1 Konstruktion und grundlegende Sätze

1.1 Eine Zahl, deren Rationalität von Konsistenz abhängt

Wir betrachten eine effektiv axiomatisierte Theorie T mit einer festgelegten effektiven Kodierung *zertifizierter* endlicher Beweise. $\mathrm{Prf}_T(p)$ bedeutet, dass p einen korrekt zertifizierten T-Beweis des Widerspruchs $0 = 1$ kodiert. Wir schreiben

$$\mathrm{Con}(T) \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall p \in \mathbb{N}\, \neg\, \mathrm{Prf}_T(p).$$

Als Referenzzahl wählen wir $\alpha = \sqrt{2} - 1 \in (0, 1)$ und bezeichnen ihre eindeutig bestimmte Binärziffernfolge mit $(b_n)_{n\geq 1}$, sodass $\alpha = \sum_{n\geq 1} b_n 2^{-n}$. Der Schalter $c_T(n)$ ist 1, falls ein $p \leq n$ mit $\mathrm{Prf}_T(p)$ vorliegt, und sonst 0. Wir definieren

$$\eta_T := \sum_{n=1}^{\infty} b_n (1 - c_T(n)) 2^{-n}. \tag{1}$$

Die Ziffern und die endliche Suche nach $p \leq n$ sind berechenbar. Der Reihenrest ist betragsmäßig höchstens 2^{-N}; deshalb ist η_T eine berechenbare reelle Zahl. Die Definition hängt von der gewählten Beweiskodierung ab, nicht aber der folgende Konsistenzsatz.

Satz 1.1 (Rationalitäts-Konsistenz-Satz)**.** *Für jede solche Theorie T gilt in der üblichen metamathematischen Interpretation*

$$\eta_T \in \mathbb{Q} \quad \Longleftrightarrow \quad \neg\, \mathrm{Con}(T).$$

Beweis. Bei Konsistenz ist $c_T(n) = 0$ für alle n, also $\eta_T = \alpha$, eine irrationale Zahl. Bei Inkonsistenz gibt es einen Beweiscode p; dann ist $c_T(n) = 1$ für $n \geq p$, und die Reihe (1) ist eine endliche Summe dyadischer Brüche, mithin rational. □

1.2 Eta-Zahlen und ihr linearer Raum

Definition 1.2. Zur Theorie T gehören die *affinen Eta-Zahlen*

$$\mathcal{E}_T := \{a\eta_T + b : a, b \in \mathbb{Q},\ a \neq 0\},$$

und ihre *rationale lineare Hülle* (kurz: *Eta-Raum*)

$$V_T := \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\eta_T = \{a + b\eta_T : a, b \in \mathbb{Q}\}. \tag{2}$$

Der Ausdruck *Eta-Zahlen* meint in dieser Arbeit die Familie $\mathcal{E}_T$; V_T ist der zugehörige algebraische Raum einschließlich der rationalen Zahlen.

Satz 1.3 (Mächtigkeit und Dichtheit)**.** *$\mathcal{E}_T$ und V_T sind abzählbar unendlich und liegen dicht in $\mathbb{R}$. In jedem nichtleeren offenen Intervall liegen unendlich viele Elemente beider Mengen.*

Beweis. Die Abbildung $\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a\eta_T + b$, hat abzählbaren Wertebereich. Für festes $a = 1$ sind $\eta_T + b$ bei verschiedenem $b \in \mathbb{Q}$ verschieden; daher sind beide Mengen unendlich. Da $\eta_T + \mathbb{Q} \subseteq \mathcal{E}_T \subseteq V_T$ und jede rationale Verschiebung einer dichten Menge dicht ist, folgt die Dichtheit. In jedem offenen Intervall liegen unendlich viele rationale Verschiebungen. □

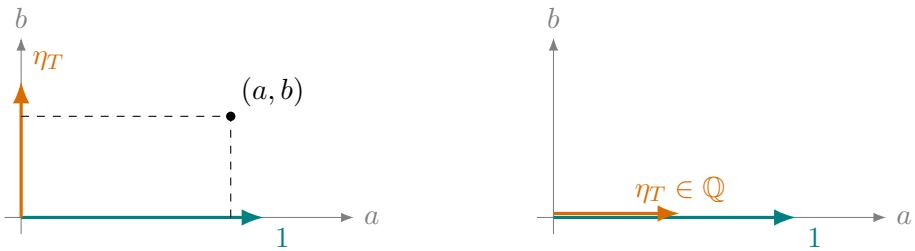
2 Algebraische Struktur und vier Grundrechenarten

2.1 Der Dimensionssatz

Satz 2.1 (Konsistenzabhängige Dimension)**.**

$$\boxed{\dim_{\mathbb{Q}} V_T = \begin{cases} 2, & \mathrm{Con}(T), \\ 1, & \neg\,\mathrm{Con}(T). \end{cases}} \tag{3}$$

Beweis. Ist T konsistent, gilt $\eta_T = \sqrt{2} - 1 \notin \mathbb{Q}$. Dann sind 1 und η_T linear unabhängig über $\mathbb{Q}$, denn aus $a + b\eta_T = 0$ bei $b \neq 0$ folgte $\eta_T = -a/b \in \mathbb{Q}$. Sie bilden eine Basis von V_T. Ist T inkonsistent, so ist $\eta_T \in \mathbb{Q}$ nach Satz 1.1, also $V_T = \mathbb{Q}$; dies hat Dimension eins über $\mathbb{Q}$. □



Konsistenz: zwei unabhängige rationale Koordinaten

Inkonsistenz: ein unabhängiger Baustein

Abbildung 1: Didaktische Koordinatenskizze. Links stehen zwei unabhängige formale Basisvektoren, rechts lässt sich η_T rational durch 1 ausdrücken. Es werden *nicht* zwei geometrische Richtungen auf der reellen Zahlengeraden behauptet.

2.2 Ring oder Körper? Eine unerwartet starke Antwort

Satz 2.2 (Körpersatz)**.** *Für die feste Referenzzahl $\alpha = \sqrt{2} - 1$ ist V_T sowohl bei Konsistenz als auch bei Inkonsistenz von T ein Körper mit den von $\mathbb{R}$ geerbten Grundrechenarten. Genauer gilt*

$$V_T = \begin{cases} \mathbb{Q}(\sqrt{2}), & \mathrm{Con}(T), \\ \mathbb{Q}, & \neg\,\mathrm{Con}(T). \end{cases} \tag{4}$$

Beweis. Ist T inkonsistent, gilt $V_T = \mathbb{Q}$, also die Körperaussage. Ist T konsistent, so ist $\eta_T = \alpha$ und $\alpha^2 = 1 - 2\alpha$. Damit liegt das Produkt zweier Elemente in V_T:

$$(a + b\alpha)(c + d\alpha) = (ac + bd) + (ad + bc - 2bd)\alpha.$$

Addition, Subtraktion und Multiplikation mit rationalen Skalaren sind ohnehin abgeschlossen. Für $x = a + b\alpha \neq 0$ benutzen wir den algebraischen Konjugierten $\alpha' = -1 - \sqrt{2}$, mit $\alpha + \alpha' = -2$ und $\alpha\alpha' = -1$. Dann gilt

$$N(x) = (a + b\alpha)(a + b\alpha') = a^2 - 2ab - b^2 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

Denn $a + b\alpha'$ ist für $(a, b) \neq (0, 0)$ ebenfalls ungleich null. Folglich

$$\frac{1}{a + b\alpha} = \frac{a - 2b - b\alpha}{a^2 - 2ab - b^2} \in V_T.$$

Schließlich gilt $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\alpha = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ wegen $\sqrt{2} = 1 + \alpha$. □

Bemerkung 2.3 (Warum die Eta-Klasse selbst kein Körper ist). $\mathcal{E}_T$ ist stets unter rationalen Verschiebungen abgeschlossen, aber im konsistenten Fall gilt $\mathcal{E}_T = V_T \setminus \mathbb{Q}$. Dann fehlen beispielsweise 0 und 1, und für $x \in \mathcal{E}_T$ ist $x + (-x) = 0 \notin \mathcal{E}_T$. Bei Inkonsistenz gilt dagegen $\mathcal{E}_T = \mathbb{Q}$ (denn $a = 1$ und $b = q - \eta_T$ stellen jedes $q \in \mathbb{Q}$ dar). Insbesondere hängt sogar die Frage, ob $\mathcal{E}_T$ ein Körper ist, vom Konsistenzfall ab.

Operation / Eigenschaft	V_T (beide Fälle)	$\mathcal{E}_T$ bei $\mathrm{Con}(T)$
Addition und Subtraktion	abgeschlossen	nicht allgemein abgeschlossen
Multiplikation	abgeschlossen	nicht allgemein abgeschlossen
Division durch Nichtnull	abgeschlossen	nicht allgemein abgeschlossen
Ring mit Eins	ja	nein
Körper	ja	nein

Die Verneinungen für $\mathcal{E}_T$ bedeuten: Es gibt Gegenbeispiele; nicht jede konkrete Operation führt notwendig aus der Menge hinaus. Im inkonsistenten Fall ist $\mathcal{E}_T = \mathbb{Q}$ selbst ein Körper.

2.3 Abhängigkeit von der Referenzzahl

Der Körpersatz ist *nicht* automatisch für jede beliebige irrationale Referenzzahl richtig. Für eine transzendente Referenzzahl β ist $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\beta$ unter Multiplikation im Allgemeinen nicht abgeschlossen (bereits β^2 lässt sich nicht als $a + b\beta$ darstellen). Auch bei algebraischen Zahlen höheren Grades kann dies scheitern. Die spezielle quadratische Gleichung $\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$ ist für Satz 2.2 entscheidend.

3 Topologie: gleiche Nähe trotz verschiedener Dimension

Satz 3.1 (Topologische Gemeinsamkeit)**.** *Beide möglichen Räume V_T sind als Teilmengen von $\mathbb{R}$ abzählbar, dicht und besitzen in der von $\mathbb{R}$ geerbten Topologie keine isolierten Punkte. Dasselbe gilt für $\mathcal{E}_T$. Nach dem klassischen Charakterisierungssatz für abzählbare metrische Räume ohne isolierte Punkte sind diese Unterräume jeweils homöomorph zu $\mathbb{Q}$.*

Beweis. Abzählbarkeit und Dichtheit folgen aus Satz 1.3; für jeden Punkt einer dichten Teilmenge trifft jede seiner offenen Umgebungen noch weitere Punkte der Menge, also gibt es keine isolierten Punkte. Die letzte Aussage ist eine Anwendung des genannten allgemeinen topologischen Satzes, dessen Beweis hier nicht wiederholt wird. □

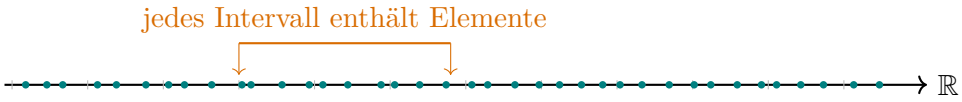


Abbildung 2: Schematische, notwendigerweise endliche Illustration der Dichtheit. Gezeichnete Punkte sind nur Beispiele; keine endliche Grafik kann mathematische Dichtheit beweisen.

Wichtig: Die *algebraische* Dimension über $\mathbb{Q}$ darf nicht mit der *topologischen* Dimension verwechselt werden. Im Sinne der üblichen topologischen Dimensionsbegriffe haben beide Räume topologische Dimension null. Der Dimensionswechsel aus Satz 2.1 ist kein räumlicher oder physikalischer Kollaps.

4 Ein allgemeiner Kodierungssatz

Die vorangegangenen Strukturresultate betreffen die konkrete Referenzzahl $\sqrt{2}-1$. Nun abstrahieren wir vom Zahlwert und betrachten eine beliebige Eigenschaft $P \subseteq \mathbb{R}$.

4.1 Das Prinzip: ein Grenzpunkt mit anderer Eigenschaft

Die Eta-Konstruktion legt ein allgemeines Muster frei: Eine bei Konsistenz unveränderte Referenzzahl wird nach der *ersten* festgestellten Inkonsistenz durch einen hinreichend nahen, aber hinsichtlich einer vorgegebenen Eigenschaft andersartigen Wert ersetzt. Die Nähe muss *effektiv kontrolliert* sein. Gerade das macht die gesamte Konstruktion berechenbar, obwohl der Schalter nie als endgültig nicht auslösend bestätigt werden muss.

Satz 4.1 (Allgemeiner reeller Konsistenz-Kodierungssatz)**.** *Sei $P \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge. Es gebe eine berechenbare reelle Zahl $\alpha \in P$ und eine gleichmäßig berechenbare Folge rationaler Zahlen $(q_p)_{p\in\mathbb{N}}$ mit*

$$q_p \notin P, \qquad |q_p - \alpha| \le 2^{-(p+2)} \quad (p \in \mathbb{N}).$$

Für jede effektiv präsentierte Theorie T mit entscheidbarem zertifiziertem Widerspruchsbeweisprädikat sei

$$x_T = \begin{cases} q_{p_T}, & \text{wenn } p_T = \min\{p : \mathrm{Prf}_T(p)\} \text{ existiert,} \\ \alpha, & \text{wenn kein solcher Code existiert.} \end{cases}$$

Dann ist x_T gleichmäßig *aus der Präsentation von T berechenbar, und es gilt*

$$P(x_T) \iff \mathrm{Con}(T). \tag{5}$$

Beweis. Für ein vorgegebenes N durchsuchen wir alle Codes $p \leq N$ und prüfen $\mathrm{Prf}_T(p)$. Finden wir einen Widerspruchsbeweis, so finden wir unter diesen Codes auch den kleinsten p_T und berechnen q_{p_T} mit Fehler höchstens $2^{-(N+2)}$. Finden wir keinen, berechnen wir α mit demselben Fehler. Im zweiten Fall ist entweder $x_T = \alpha$, oder der kleinste Beweiscode liegt über N; dann ist

$$|x_T - \alpha| = |q_{p_T} - \alpha| \leq 2^{-(p_T+2)} < 2^{-(N+2)}.$$

In jedem Fall beträgt der Gesamtfehler höchstens $2^{-(N+1)} < 2^{-N}$. Der Algorithmus ist einheitlich in T. Bei Konsistenz ist $x_T = \alpha \in P$; bei Inkonsistenz ist $x_T = q_{p_T} \notin P$. □

Bemerkung 4.2 (Die inverse Orientierung). Vertauscht man die Zugehörigkeiten ($\alpha \notin P$, dagegen $q_p \in P$), erhält man in genau derselben Weise $P(x_T) \leftrightarrow \neg\,\mathrm{Con}(T)$. Der Satz betrifft *semantische* Eigenschaften in der üblichen reellen Interpretation; für die formale Beweisbarkeit dieser Äquivalenz in T ist mehr erforderlich.

4.2 Welche Eigenschaften erfüllt das Kriterium?

Die Voraussetzung besitzt eine anschauliche topologische Bedeutung: α ist ein *effektiv erreichbarer Grenzpunkt des Komplements* von P. Ohne diese Annäherungsmöglichkeit funktioniert gerade dieser allgemeine Mechanismus nicht. Die folgenden Beispiele illustrieren die Reichweite, ohne die Voraussetzungen an die interne Formalisierung zu verschweigen.

Eigenschaft P	Referenz $\alpha \in P$	Rationale Werte $q_p \notin P$
Nullheit $x = 0$	0	$2^{-(p+2)}$
Vorzeichen $x \geq 0$	0	$-2^{-(p+2)}$
Rationalität $x \in \mathbb{Q}$	Hier nicht möglich	Rationale q_p können nicht außerhalb von $\mathbb{Q}$ liegen
Irrationalität $x \notin \mathbb{Q}$	$\sqrt{2} - 1$	dyadische Abschneidungen von $\sqrt{2} - 1$
Gleichheit $x = \alpha$	α	$\alpha + 2^{-(p+2)}$ ist nicht rational, aber berechenbar; siehe Verallgemeinerung unten

Die Tabelle zeigt auch eine beabsichtigte Grenze des Satzes: Bei der Eigenschaft $x = \alpha$ benötigt man im Allgemeinen *berechenbare reelle* Vergleichswerte statt rationaler q_p. Der Beweis von Satz 4.1 bleibt wortgleich gültig, wenn die rationalen q_p durch eine *gleichmäßig berechenbare Folge berechenbarer reeller Zahlen* ersetzt werden. Für die Rationalität verwendet man am besten die inverse Orientierung mit irrationalem α und rationalen q_p; sie ergibt $\mathrm{Rat}(x_T) \leftrightarrow \neg\,\mathrm{Con}(T)$.

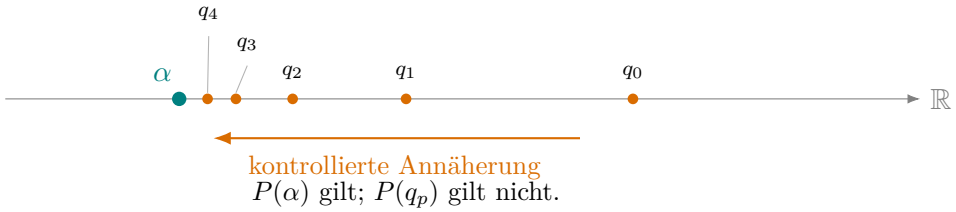


Abbildung 3: Schematisches Kodierungsprinzip. Der Abstand der Alternativwerte zur Referenz schrumpft mit dem Codeindex. Die Zeichnung beweist weder die Eigenschaft P noch die effektive Schranke.

4.3 Wann ist die Eigenschaft innerhalb der Theorie unentscheidbar?

Satz 4.1 besagt noch *nicht*, dass T die Aussage $P(x_T)$ beweisen oder widerlegen kann. Das ist eine gesonderte formal-logische Stufe.

Satz 4.3 (Transfer relativer Unbeweisbarkeit)**.** *Sei T eine konsistente, hinreichend starke effektiv axiomatisierte Theorie, für deren Konsistenzformel Gödel II gilt. Es gebe eine arithmetische Formel P_T für die betreffende Zahleneigenschaft mit*

$$T \vdash (\mathsf{P}_T \leftrightarrow \mathrm{Con}(T)).$$

Dann gilt $T \nvdash \mathsf{P}_T$. Ist T zusätzlich Σ_1-korrekt und $\neg\,\mathrm{Con}(T)$ wie üblich eine Σ_1-Aussage, so gilt auch $T \nvdash \neg\mathsf{P}_T$.

Beweis. Ein Beweis von P_T würde zusammen mit der internen Äquivalenz $\mathrm{Con}(T)$ beweisen, entgegen Gödel II. Ein Beweis von $\neg\mathsf{P}_T$ würde mittels derselben Äquivalenz $\neg\,\mathrm{Con}(T)$ beweisen, eine unter Konsistenz falsche Σ_1-Aussage. Das verbietet die angenommene Σ_1-Korrektheit. □

Bemerkung 4.4 (Formalisierungsgrenze). Die interne Äquivalenz folgt *nicht allein* aus Satz 4.1. Die Definition der berechenbaren reellen Zahl, das Prädikat P und die Eindeutigkeit der verwendeten Rechenverfahren müssen für jede Anwendung in der Sprache von T repräsentiert und ihre Eigenschaften dort bewiesen werden. Selbst eine externe Äquivalenz ersetzt diesen Schritt nicht. Die Stärke des allgemeinen Satzes liegt in der einheitlichen *Konstruktion*, nicht in einer voraussetzungslosen Unvollständigkeitsbehauptung für jedes P.

5 Charakterisierung des effektiven Schaltermodells

5.1 Modell und Geltungsbereich

Eine semantische Äquivalenz $P(x_T) \leftrightarrow \mathrm{Con}(T)$ für *eine einzelne festgelegte Theorie* sagt noch nichts darüber, welche effektiven Grenzwerte durch das Verfahren verarbeitet werden. Insbesondere kann man eine mathematisch definierte Fallunterscheidung hinschreiben, ohne einen Algorithmus zur Berechnung ihres Ergebnisses zu erhalten. Für einen Notwendigkeitssatz legen wir daher die *Art des Verfahrens* offen.

Wir stellen die Ergebnisse der potentiellen Suche nach einem Widerspruchsbeweis durch einen unendlichen binären Strom $s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dar. Die Nullfolge 0^∞ bedeutet: Nie tritt ein positives Signal auf. Der Strom 0^p10^∞ bedeutet: Das erste positive Signal kommt an Position p; danach ist der weitere Strom für die Definition unwesentlich. Diese Ströme sind zunächst *abstrakte Testeingaben*, keine Behauptung, dass eine bestimmte Theorie tatsächlich einen Beweis an einer vorgeschriebenen Stelle besitzt.

Definition 5.1 (Effektives Schalterverfahren)**.** Ein *effektiv stetiges Schalterverfahren* besteht aus einer Abbildung

$$F : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit einem Algorithmus, der aus einem endlichen Präfix von s und einer Genauigkeit N eine rationale Approximation an $F(s)$ mit Fehler höchstens 2^{-N} berechnet. Zusätzlich sei ein *berechenbarer Stetigkeitsmodul* m gegeben mit

$$s \restriction m(N) = t \restriction m(N) \quad\Longrightarrow\quad |F(s) - F(t)| \le 2^{-N}. \tag{6}$$

Die Kodierung einer Eigenschaft $P \subseteq \mathbb{R}$ in *positiver Orientierung* bedeutet:

$$\alpha := F(0^\infty) \in P, \qquad \beta_p := F(0^p10^\infty) \notin P \quad (p \in \mathbb{N}).$$

Die explizite Modulforderung ist für die folgende Schlussrechnung zweckmäßig. Sie gilt für die üblichen totalen berechenbaren Funktionen vom Cantorraum in die berechenbaren reellen Zahlen aufgrund der effektiven Kompaktheit des Cantorraums; dieser allgemeine Satz wird hier nicht als neuer Beweis ausgegeben.

Satz 5.2 (Notwendige effektive Grenzpunkteigenschaft)**.** *Besitzt P ein effektiv stetiges Schalterverfahren in positiver Orientierung, dann existieren eine berechenbare Zahl $\alpha \in P$ und eine gleichmäßig berechenbare Folge (β_p) in $\mathbb{R} \setminus P$ sowie ein berechenbarer Index $h(N)$, für den*

$$p \geq h(N) \quad \Longrightarrow \quad |\beta_p - \alpha| \leq 2^{-N}. \tag{7}$$

Insbesondere liegt α im Abschluss des Komplements von P.

Beweis. Die Nullfolge und jeder Strom 0^p10^∞ sind berechenbar. Aus dem Algorithmus für F sind daher α und die Folge (β_p) gleichmäßig berechenbar. Setze $h(N) = m(N)$. Für $p \geq m(N)$ stimmen die ersten $m(N)$ Stellen von 0^∞ und 0^p10^∞ überein. Gleichung (6) ergibt die Schranke. Die Folge β_p enthält zu jeder vorgegebenen Umgebung von α Punkte des Komplements. □

5.2 Die hinreichende Richtung und ein exaktes Kriterium

Für die Umkehrung erlauben wir, wie bereits nach Satz 4.1 erwähnt, *gleichmäßig berechenbare reelle* Alternativwerte statt nur rationaler. Dies ist für Gleichheitseigenschaften entscheidend.

Satz 5.3 (Charakterisierung im effektiv stetigen Schaltermodell)**.** *Für eine Eigenschaft $P \subseteq \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Es existiert ein effektiv stetiges Schalterverfahren F, dessen Nullstromwert in P und dessen Werte auf sämtlichen Einmalsignalströmen außerhalb P liegen.*

2. *Es gibt eine berechenbare Zahl $\alpha \in P$ und eine gleichmäßig berechenbare Folge $\beta_p \notin P$ mit einer* effektiven *Konvergenzschranke $|\beta_p - \alpha| \leq 2^{-(p+2)}$ für alle $p \in \mathbb{N}$.*

Beweis. (2) ⇒ (1). Definiere $F(s) = \alpha$, falls s keine Eins enthält, andernfalls $F(s) = \beta_p$ für die erste Eins an Position p. Um $F(s)$ bis auf Fehler 2^{-N} zu berechnen, prüfe die ersten $N + 2$ Positionen und approximere den zutreffenden Wert mit Fehler $2^{-(N+1)}$. Kommt die erste Eins erst später, liegt ihr Alternativwert höchstens $2^{-(N+4)}$ von α entfernt. Dies gibt die verlangte uniforme Berechnung. Stimmen zwei Eingaben bis einschließlich Position $N + 2$ überein, sind entweder die ersten Einspositionen gleich, oder beide Ausgaben liegen innerhalb $2^{-(N+4)}$ von α. Folglich gilt ein berechenbarer Stetigkeitsmodul, etwa $m(N) = N + 2$ (gegebenenfalls mit einer fixen Indexverschiebung für die gewählte Startkonvention).

(1) ⇒ (2). Aus Satz 5.2 erhalten wir einen berechenbaren Modulus h und die Folge β_p. Für jedes j bestimmen wir effektiv einen Index $r(j)$ größer als $h(j + 2)$ und größer als alle vorher gewählten Indizes. Dann setze $\gamma_j = \beta_{r(j)}$. Es gilt $\gamma_j \notin P$ und $|\gamma_j - \alpha| \leq 2^{-(j+2)}$. Die Folge (γ_j) erfüllt (2), mit Umbenennung der Indizes. □

Bemerkung 5.4 (Was genau charakterisiert wurde). Der Satz ist eine Charakterisierung *unserer effektiven Schalterarchitektur*, nicht aller möglichen Abbildungen von Theorien auf Zahlen und insbesondere keine Charakterisierung sämtlicher formal unentscheidbarer Zahleneigenschaften. Die Testströme sind synthetische Eingaben des Schalterverfahrens. Eine beliebige Zuordnung $T \mapsto x_T$ könnte eine andere Form haben und wird vom Satz nicht erfasst. Auch die interne Äquivalenz $T \vdash (P(x_T) \leftrightarrow \mathrm{Con}(T))$ folgt daraus nach wie vor nicht automatisch.

5.3 Ein lokales Unmöglichkeitskriterium

Satz 5.5 (Keine Kodierung an einem isolierten Eigenschaftspunkt)**.** *Ist $\alpha \in P$ und gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subseteq P$, dann kann kein effektiv stetiges Schalterverfahren mit $F(0^\infty) = \alpha$ sämtliche Einmalsignalströme auf Werte außerhalb P schicken.*

Beweis. Nach Satz 5.2 müsste eine Folge von Punkten außerhalb P gegen α konvergieren. Für große Indizes lägen diese Punkte aber in der angegebenen Umgebung und damit in P, ein Widerspruch. □

Bemerkung 5.6 (Beispiel und Grenzfall). Die Eigenschaft $x > 0$ lässt sich mit Referenzwert $\alpha = 1$ nicht in positiver Orientierung durch einen solchen Schalter kodieren, denn 1 liegt im Inneren von $(0, \infty)$. Für die Eigenschaft $x \geq 0$ lässt sich dagegen $\alpha = 0$ und $\beta_p = -2^{-(p+2)}$ wählen. Auch die Nullheit $P = \{0\}$ ist kodierbar, obwohl P kein offenes Intervall enthält. Entscheidend ist die *Grenzlage* zwischen Eigenschaft und Gegenbeispielen, nicht ihre bloße logische Komplexität.

5.4 Die zusätzliche Grenze interner Beweisbarkeit

Die Charakterisierung ist eine Aussage der berechenbaren Analysis. Für eine Unentscheidbarkeitsaussage innerhalb einer Theorie T ist zusätzlich nachzuweisen: Die Berechnung von F und die Eigenschaften von P müssen in T so repräsentiert werden, dass T die gewünschte Äquivalenz selbst herleiten kann. Dann erst greifen die Gödel-Argumente aus Satz 4.3; die dort genannten Korrektheitsannahmen bleiben bestehen. Der Grenzpunktsatz ersetzt diese syntaktische Arbeit nicht.

6 Eigenschaften berechenbarer reeller Zahlen

6.1 Berechenbare Werte und unentscheidbare Eigenschaften

Eine reelle Zahl x heißt *berechenbar*, wenn ein Algorithmus zu jeder Eingabe N eine rationale Zahl r_N mit $|x - r_N| \leq 2^{-N}$ liefert. Dies garantiert noch keinen Algorithmus, der für jede solche Eingabebeschreibung entscheidet, ob $x = 0$, $x \in \mathbb{Q}$ oder $x = y$ gilt. Die Unterscheidung ist *uniform*: Ein einzelner fest gewählter klassischer Zahlenwert kann sehr wohl eine triviale konstante Berechnung besitzen, obwohl wir aus seiner gegebenen Definition keine solche Berechnung effektiv gewinnen können.

Definition 6.1 (Ein einfaches Null-Eta-Signal)**.** Mit dem entscheidbaren zertifizierten Beweisprädikat aus Abschnitt 1 sei

$$z_T = \sum_{n=0}^{\infty} h_T(n) 2^{-(n+1)},$$

$$h_T(n) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \text{ der kleinste Widerspruchsbeweiscode ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $n = 0$ ist die Bedingung “kleinster Code” mit der endlichen Suche $p < n$ zu verstehen. Es kann höchstens ein Summand ungleich null sein.

Satz 6.2 (Nullheit kodiert Konsistenz)**.** *Die Zahl z_T ist gleichmäßig aus einem effektiven zertifizierten Beweisprüfer für T berechenbar, und*

$$z_T = 0 \iff \mathrm{Con}(T), \qquad z_T > 0 \iff \neg\,\mathrm{Con}(T).$$

Beweis. Der Nachweis eines kleinsten Widerspruchsbeweiscodes p ist eine endliche Prüfung. Existiert ein solcher Code, ist $z_T = 2^{-(p+1)} > 0$; andernfalls sind alle Summanden null. Für die Berechnung auf Fehler höchstens 2^{-N} genügt es, die endlich vielen Codes $p < N$ zu überprüfen: Ist darunter der kleinste Beweiscode, wird $2^{-(p+1)}$ ausgegeben, andernfalls 0. Ein übersehener Beweiscode $p \geq N$ kann nur einen Wert höchstens $2^{-(N+1)}$ bewirken. □

Bemerkung 6.3 (Einfacher als die ursprüngliche Eta-Zahl). Für die Nullheit ist keine irrationale Referenzzahl nötig. Die ursprüngliche Konstruktion η_T bleibt jedoch für die algebraischen Struktursätze besonders nützlich. Die beiden Beispiele kodieren denselben Konsistenzstatus durch unterschiedliche Zahleneigenschaften.

6.2 Welche Eigenschaften lassen sich kodieren?

Die folgenden Anwendungen spezialisieren den vorangegangenen Kodierungssatz. Eine andere berechenbare irrationale Referenzzahl kann die Rolle von $\sqrt{2} - 1$ übernehmen, wenn ihre benötigten Eigenschaften beweisbar sind. Eine berechenbare transzendente Referenzzahl liefert auf semantischer Ebene auch eine Transzendenz/Algebraizitäts-Kodierung, weil ein endliches Binärpräfix algebraisch ist.

Eigenschaft	Präziser Ansatz und Grenze
Nullheit	$z_T = 0$ genau bei Konsistenz (Satz 6.2); voller Beweis ohne Referenzkonstante.
Positivität	$z_T > 0$ genau bei Inkonsistenz; dies liefert nicht automatisch drei unabhängige Vorzeichenfälle.
Rationalität	η_T ist rational genau bei Inkonsistenz (Satz 1.1).
Gleichheit	$\eta_T = \sqrt{2} - 1$ genau bei Konsistenz; eine Relation zwischen zwei effektiv gegebenen reellen Zahlen.
Algebraizität	Mit einer berechenbaren transzendenten Referenzzahl: beim Schalterfall dyadisch algebraisch, sonst transzendent.
Normalität	Eine normale berechenbare Referenzzahl und ein endlicher Nullschwanz liefern eine semantische Äquivalenz; die internen Häufigkeitsbeweise sind eine eigene Aufgabe.

Die Tabelle zeigt Anwendungen und Grenzen des bereits bewiesenen allgemeinen Prinzips; eine interne Unbeweisbarkeitsaussage benötigt zusätzlich einen formalen Beweis in der jeweiligen Theorie.

6.3 Ein Satz der Form "Nicht alle berechenbaren Zahlen ..."

Satz 6.4 (Relative Unentscheidbarkeit der Rationalität)**.** *Sei T eine konsistente, hinreichend starke, effektiv axiomatisierte Theorie mit einem für Gödel II geeigneten Beweisprädikat. Angenommen, die spezielle arithmetische Formalisierung erfüllt*

$$T \vdash \big(\mathrm{Rat}(\eta_T) \leftrightarrow \neg\,\mathrm{Con}(T)\big).$$

Dann gilt $T \nvdash \neg\,\mathrm{Rat}(\eta_T)$. Ist T darüber hinaus Σ_1-korrekt und die Inkonsistenzaussage wie üblich eine Σ_1-Formel, gilt auch $T \nvdash \mathrm{Rat}(\eta_T)$.

Beweis. Aus einem T-Beweis von $\neg\,\mathrm{Rat}(\eta_T)$ würde durch die formalisierte Äquivalenz ein Beweis von $\mathrm{Con}(T)$ entstehen, entgegen Gödel II. Ein T-Beweis von $\mathrm{Rat}(\eta_T)$ würde einen Beweis der falschen Σ_1-Aussage $\neg\,\mathrm{Con}(T)$ ergeben. Das ist mit der angenommenen Σ_1-Korrektheit unvereinbar. □

Damit ist unter genau diesen Voraussetzungen die allgemeine Behauptung widerlegt, jede berechenbare reelle Zahl müsse in T nachweislich rational oder nachweislich irrational sein. Das ist ein Satz über *relative Beweisbarkeit*, nicht die Verneinung des klassischen Satzes, dass jede reelle Zahl rational oder irrational ist.

7 Warum die ganzzahlige Analogie scheitert

7.1 Primzahl, Parität und Teilbarkeit

Es liegt nahe, mit zwei festen ganzen Zahlen zu arbeiten:

$$P_T = \begin{cases} 2, & \mathrm{Con}(T), \\ 4, & \neg\,\mathrm{Con}(T), \end{cases} \qquad E_T = \begin{cases} 2, & \mathrm{Con}(T), \\ 3, & \neg\,\mathrm{Con}(T). \end{cases}$$

Dann ist P_T genau dann prim und E_T genau dann gerade, wenn T konsistent ist. Entsprechend kodieren die Werte n und $n+1$ für jedes $n \geq 2$ die Teilbarkeit durch n. Für das *semantische* Beispiel brauchen wir weder einen Primzahlindex noch den Satz über unendlich viele Primzahlen.

Satz 7.1 (Keine uniforme exakte Ganzzahlberechnung)**.** *Es gibt kein allgemeines Verfahren, das aus jeder effektiven Beschreibung einer rekursiv aufzählbaren Theorie T mit festem zertifiziertem Beweisbegriff immer den genauen Wert von P_T berechnet.*

Beweis. Wäre dies möglich, könnte man aus der Ausgabe 2 oder 4 die Konsistenz beliebiger effektiv präsentierter Theorien entscheiden. Das Konsistenzproblem dieser Klasse ist unentscheidbar: Für ein gegebenes Programm e bilde man effektiv die Theorie S_e mit den Axiomen einer fest gewählten konsistenten schwachen Arithmetik und der zusätzlichen Axiomregel, die $0 = 1$ genau dann aufzählt, wenn e anhält. Dann ist S_e genau dann inkonsistent, wenn e anhält. Ein solches Verfahren würde also das Halteproblem entscheiden. Widerspruch. □

Bemerkung 7.2 (Nicht mit individueller Unberechenbarkeit verwechseln)*.* Für ein *festes* T ist P_T in klassischer Mathematik entweder genau 2 oder genau 4, und beide Zahlen sind selbstverständlich berechenbar. Satz 7.1 verneint die Existenz eines *einheitlichen effektiven Übergangs von der Theoriebeschreibung zum exakten Wert.* Er besagt nicht, dass eine bestimmte ganze Zahl an sich unberechenbar wäre.

Satz 7.3 (Diskretheit erklärt die Hürde)**.** *Gibt es einen uniformen Algorithmus, der aus der Theoriebeschreibung Näherungswerte zu P_T mit garantiertem Fehler kleiner als $1/2$ erzeugt, so gibt es einen uniformen Algorithmus für den exakten Wert von P_T. Ein solcher Näherungsalgorithmus kann nach Satz 7.1 nicht existieren.*

Beweis. Da P_T ganzzahlig ist, ergibt die Rundung einer Näherung mit Fehler $< 1/2$ den exakten Wert. □

8 Ergebnis, Beweisgrenzen und Einordnung

Alle Elemente von $\mathcal{E}_T$ sind als einzelne reelle Zahlen berechenbar: Die Parameter a, b sind rational und η_T besitzt eine effektiv berechenbare Folge von Näherungsbrüchen. Daraus folgt jedoch keine allgemeine Entscheidungsprozedur für ihre Rationalität, und insbesondere folgt kein interner Beweis der Konsistenz von T.

Die bisher bewiesenen Äquivalenzen sind zunächst mathematische Aussagen in einer Metatheorie. Für Aussagen der Form

$$T \vdash (\dim_{\mathbb{Q}} V_T = 2 \leftrightarrow \mathrm{Con}(T))$$

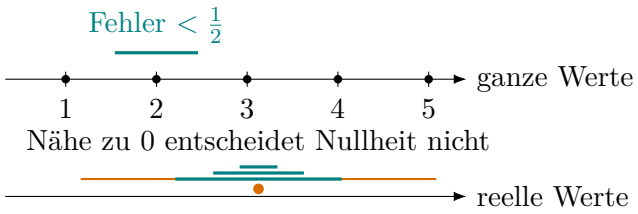


Abbildung 4: Schematischer Unterschied: Bei ganzzahligen Zielwerten liefert eine hinreichend genaue garantierte Näherung den exakten Wert. Bei reellen Zahlen ist selbst eine Folge immer genauerer Näherungen noch kein allgemeiner Test auf exakte Nullheit.

müssen die Kodierung von V_T, der Dimension und die nötigen arithmetischen Ableitungen innerhalb von T präzise festgelegt und nachgewiesen werden. Für eine solche *interne* Formalisierung wird hier kein fertiges Beweiszertifikat beansprucht. Die Verwendung von Gödels zweitem Unvollständigkeitssatz setzt zudem die üblichen Voraussetzungen an T und sein Beweisprädikat voraus; die Unbeweisbarkeit der jeweiligen Gegenrichtung erfordert unter Umständen stärkere Korrektheitsannahmen als bloße Konsistenz.

Philosophische Einordnung

Die Konstruktion unterscheidet drei Ebenen: die Zahl η_T als eindeutig definierten Gegenstand, den algebraischen Raum V_T mit seinen strukturellen Eigenschaften und den axiomatischen Rahmen, innerhalb dessen Aussagen darüber bewiesen werden. Je nach tatsächlichem Konsistenzstatus tritt einer der beiden algebraischen Fälle ein; das Wechseln unseres Betrachtungsstandpunkts verändert den Raum nicht. Gleichwohl kann eine Eigenschaft algebraisch verschieden und topologisch gleichartig erscheinen. Dies ist kein Widerspruch, sondern eine Folge unterschiedlicher mathematischer Fragestellungen.

Eine Analogie zu komplexen Zahlen ist für die *Koordinatendarstellung* nützlich, darf aber nicht wörtlich verstanden werden: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist zweidimensional über $\mathbb{Q}$ und liegt vollständig in $\mathbb{R}$, während $\mathbb{C}$ zweidimensional über $\mathbb{R}$ ist und eine andere algebraische Struktur besitzt. Auch eine Analogie zu überlagerten Wellen oder einem Kollaps ist ausschließlich metaphorisch: Es gibt hier keine physikalische Superposition und keinen durch Beobachtung ausgelösten Zustandswechsel.

Abschließende Einordnung und Geltungsgrenzen

Die Untersuchung liefert eine definierte Klasse berechenbarer Eta-Zahlen, einen Dimensions- und Körpersatz für ihren rationalen linearen Raum sowie einen Gegensatz zwischen algebraischer Dimension und topologischer Gestalt. Darüber hinaus geben der Kodierungssatz 4.1 und der Charakterisierungssatz 5.3 eine hinreichende beziehungsweise innerhalb des festgelegten effektiv stetigen Schaltermodells auch notwendige Grenzpunktbedingung. Die Beispiele zur Nullheit, Rationalität und Gleichheit illustrieren denselben Mechanismus; der Vergleich mit ganzen Zahlen markiert dessen effektive Grenze bei diskreten Zielwerten.

Die Resultate sind Aussagen in einer Metatheorie. Daraus ist ohne zusätzliche, *innerhalb von T nachgewiesene* Repräsentations- und Beweisbarkeitslemmata keine interne Unentscheidbarkeit abzuleiten. Insbesondere liegt kein vollständiges formales oder maschinell zertifiziertes Beweiszertifikat vor. Die hier behandelte Charakterisierung ist ausdrücklich auf das definierte Schaltermodell beschränkt; sie wird nicht als Charakterisierung aller möglichen Konsistenzkodierungen ausgegeben. Diese Feststellungen beschreiben den bewiesenen Umfang des Textes und sind keine Zusagen weiterer Arbeit.

Der unmittelbare Nutzen liegt vor allem in der mathematischen Logik und ihrer Didaktik: An einem exakt berechenbaren Zahlenwert lassen sich Algebra, Topologie und die von

Beweisbarkeit getrennte semantische Geltung mathematischer Eigenschaften vergleichen. Eine eigenständige technische Anwendung oder ein Neuheitsanspruch gegenüber sämtlichen bekannten Kodierungsverfahren wird nicht behauptet.

Contact: https://www.dietereigler.at