Kernreduktion der Normalität der Tribonacci-Konkatenation in Basis 32

02.06.2026

Zusammenfassung

Diese Arbeit gibt eine kurze Kernfassung der Reduktion der Normalität der Tribonacci-Konkatenation. Sie startet bei der Tribonacci-Konkatenation

$$T_{32} = 0.(T_1)_{32}(T_2)_{32}(T_3)_{32}\cdots$$

und trennt streng zwischen bewiesenen Reduktionsschritten, externen Standardsätzen und offenen digitalen Hypothesen. Der mathematisch gesicherte Teil dieser Fassung zeigt vollständig: Aus der Binet-Cylinder-Sampling-Hypothese BCS folgt die Normalität von T_{32} in Basis 32. Der eigentliche offene Kern liegt nicht mehr in der Carry-Mechanik der Tribonacci-Konkatenation, sondern in digitalen Aussagen über

$$\varepsilon = \log_{32}(\alpha/2),$$

wobei α die Tribonacci-Konstante ist. Der offene digitale Teil wird kompakt als digitales Reduktionspaket DRP formuliert. Innerhalb dieses Pakets ist der zentrale Kern FD-HCLA, auditiert durch LBDL, FDAL, SULC und ITL. Das Dokument beweist keine unkonditionale Normalität. Es markiert exakt, welche offene digitale Aussage noch zu beweisen wäre.

Inhaltsverzeichnis

1 Logischer Status und roter Faden

Das Ziel ist die Normalität der Zahl

$$T_{32} = 0.(T_1)_{32}(T_2)_{32}(T_3)_{32}\cdots$$

in Basis 32. Die Folge (T_n) ist die kanonische Tribonacci-Folge

$$T_0 = 0, \qquad T_1 = 0, \qquad T_2 = 1, \qquad T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n.$$

Der rote Faden dieser Fassung ist:

$$\boxed{\text{BCS} \Longrightarrow \text{LCBS} \Longrightarrow \text{Carry-Mixing} \Longrightarrow \text{Normalität von } T_{32}.}$$

Dieser Teil wird in den Abschnitten 2–5 vollständig bewiesen.

Der offene arithmetische Teil ist dagegen:

$$\boxed{\text{Wie beweist man BCS?}}$$

Der offene digitale Teil wird in dieser Arbeit im Paket DRP und insbesondere durch FD-HCLA sowie die vier Audit-Bausteine LBDL, FDAL, SULC und ITL zusammengefasst. Diese Aussagen betreffen nicht direkt die Ziffern von T_{32}, sondern digitale Strukturvermeidung für

$$\varepsilon = \log_{32}(\alpha/2).$$

Bemerkung 1.1 (Kein versteckter Normalitätsbeweis für ε)**.** *In dieser Fassung wird weder die Normalität von ε behauptet noch vorausgesetzt. Die Zahl ε tritt auf, weil die Längen der Tribonacci-Zahlen asymptotisch durch $n \log_{32} \alpha$ gesteuert werden und*

$$\log_{32} \alpha = \frac{1}{5} + \varepsilon.$$

Die offene digitale Frage ist daher eine strukturierte Nichtresonanzfrage für ε, nicht die Normalität von ε selbst.

2 Tribonacci-Wachstum und die arithmetische Kennzahl ε

Lemma 2.1 (Binet-Abschätzung)**.** *Sei $\alpha > 1$ die reelle Nullstelle von*

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0.$$

Dann gibt es Konstanten $c > 0$, $C > 0$ und $0 < \rho < 1$, so dass

$$T_n = c\alpha^n + O(\rho^n).$$

Insbesondere gilt für die Länge L_n der Basis-32-Darstellung von T_n

$$L_n = n \log_{32} \alpha + O(1).$$

Beweis. Das charakteristische Polynom der Rekursion ist

$$p(x) = x^3 - x^2 - x - 1.$$

Es besitzt eine reelle Nullstelle $\alpha > 1$. Die beiden weiteren Nullstellen seien β_1, β_2. Da das Produkt der drei Nullstellen gleich 1 ist und $\beta_2 = \overline{\beta_1}$, gilt

$$|\beta_1|^2 = |\beta_1 \beta_2| = \frac{1}{\alpha},$$

also $|\beta_1| = |\beta_2| = \alpha^{-1/2} < 1$. Die allgemeine Lösung der linearen Rekursion hat daher die Form

$$T_n = c\alpha^n + c_1 \beta_1^n + c_2 \beta_2^n.$$

Für die kanonische Tribonacci-Folge ist der Koeffizient c des dominanten Eigenwertes positiv; dies folgt etwa aus der Perron-Frobenius-Darstellung der Begleitmatrix und der Positivität der Folge ab $n = 2$. Mit

$$\rho = \max(|\beta_1|, |\beta_2|) < 1$$

ergibt sich

$$T_n = c\alpha^n + O(\rho^n).$$

Für große n ist $T_n > 0$, und somit

$$\log_{32} T_n = n \log_{32} \alpha + \log_{32} c + o(1).$$

Da $L_n = \lfloor \log_{32} T_n \rfloor + 1$, folgt

$$L_n = n \log_{32} \alpha + O(1).$$

□

Lemma 2.2 (Zerlegung der Wachstumsrotation)**.** *Setze*

$$\varepsilon = \log_{32}(\alpha/2).$$

Dann gilt

$$\log_{32} \alpha = \frac{1}{5} + \varepsilon.$$

Beweis. Da $32 = 2^5$, gilt $\log_{32} 2 = 1/5$. Also

$$\log_{32} \alpha = \log_{32} 2 + \log_{32}(\alpha/2) = \frac{1}{5} + \varepsilon.$$

□

3 Boundary-Avoidance

Der Übergang vom Binet-Hauptterm zu den echten Tribonacci-Zahlen kann nur an Zylindergrenzen fehlschlagen. Dieser Abschnitt beweist, dass solche Boundary-Fehler im Bulk vernachlässigbar sind.

Definition 3.1 (Bulk-Dreieck)**.** *Für $R \geq 1$ setzen wir*

$$\Delta_N(R) = \{(n, k) : 1 \leq n \leq N,\ R \leq k \leq L_n - R\}.$$

Lemma 3.2 (Größe des Bulk-Dreiecks)**.** *Für festes R gilt*

$$|\Delta_N(R)| \asymp N^2.$$

Beweis. Nach dem Längenlemma gilt $L_n = n \log_{32} \alpha + O(1)$. Daher

$$|\Delta_N(R)| = \sum_{n \le N} (L_n - 2R + O(1)) = \frac{1}{2} (\log_{32} \alpha) N^2 + O_R(N),$$

und dies ist $\asymp N^2$. $\square$

Für ein festes Fenster $[a, b] \subset \mathbb{Z}$ verwenden wir im Folgenden stets einen Bulk-Rand

$$R \ge R_0(a, b) := 1 + \max\{0, -a, b\}.$$

Dann gilt für jedes $(n, k) \in \Delta_N(R)$ insbesondere $k + a \ge 1$; die Potenz 32^{k+a} ist also eine positive ganze Potenz von 32. Außerdem liegen die betrachteten relativen Fensterpositionen vom Blockrand weg.

Definition 3.3 (Boundary-Avoidance)**.** *Sei $C_1 > 0$ so gewählt, dass für $j = 1, 2, 3$*

$$|T_{n-j} - c\alpha^{n-j}| \le C_1 \rho^n$$

gilt. Boundary-Avoidance bedeutet: Für jedes feste Fenster $[a, b] \subset \mathbb{Z}$, jedes feste $R \ge R_0(a, b)$ und jedes $j = 1, 2, 3$ hat die Menge der Paare $(n, k) \in \Delta_N(R)$ mit

$$\operatorname{dist}(c\alpha^{n-j}, 32^{k+a}\mathbb{Z}) \le C_1 \rho^n$$

relative Dichte $o(1)$.

Lemma 3.4 (2-adische Interpolation)**.** *Für jede Restklasse $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ gibt es eine beschränkte 2-adisch analytische Funktion $f_r : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ mit*

$$f_r(x) = T_{r+4x} \qquad (x \in \mathbb{N}).$$

Keine dieser Funktionen ist identisch null.

Beweis. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Begleitmatrix. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} T_n \\ T_{n+1} \\ T_{n+2} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}.$$

Eine direkte Rechnung liefert

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} = I + 2B$$

mit ganzzahliger Matrix B. Für $x \in \mathbb{Z}_2$ ist

$$(I + 2B)^x = \sum_{m \ge 0} \binom{x}{m} (2B)^m$$

2-adisch konvergent. Definiere

$$f_r(x) = e_1^T A^r (I + 2B)^x \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist f_r beschränkt und 2-adisch analytisch und erfüllt für natürliche x

$$f_r(x) = T_{r+4x}.$$

Da $T_m > 0$ für alle $m \geq 2$, enthält jede Restklasse modulo 4 unendlich viele nichtverschwindende Folgenglieder. Also ist keine Funktion f_r identisch null. □

Lemma 3.5 (2-adische Sublevel-Schätzung, Standardlemma)**.** *Sei $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ beschränkt 2-adisch analytisch und nicht identisch null. Dann gibt es Konstanten $C > 0$, $\eta > 0$, so dass für alle $X \geq 1$ und $s \geq 1$*

$$\#\{0 \leq x \leq X : f(x) \neq 0,\ v_2(f(x)) \geq s\} \leq C(X 2^{-\eta s} + 1).$$

Beweis. Dies ist die hier benötigte Standardfolge des Weierstraß-Vorbereitungssatzes beziehungsweise des Strassmann-Prinzips. Nach diesen Sätzen hat f in $\mathbb{Z}_2$ nur endlich viele Nullstellen, solange f nicht identisch null ist. Außerhalb kleiner disjunkter Kugeln um diese Nullstellen ist $v_2(f(x))$ beschränkt. In einer Kugel um eine Nullstelle ζ der Multiplizität m hat f die Form

$$f(x) = 2^u (x - \zeta)^m g(x),$$

wobei g eine 2-adische Einheit ist. Die Bedingung $v_2(f(x)) \geq s$ impliziert daher, bis auf additive Konstanten,

$$v_2(x - \zeta) \geq \frac{s - C_0}{m}.$$

Somit liegt die Sublevel-Menge in endlich vielen Restklassen modulo $2^{\lceil \eta s - C_1 \rceil}$. Eine Restklasse modulo 2^q enthält unter $0, \ldots, X$ höchstens $X 2^{-q} + 1$ Zahlen. Summation über die endlich vielen Restklassen ergibt die Behauptung. □

Proposition 3.6 (Bewertungstail)**.** *Für die kanonische Tribonacci-Folge gilt*

$$\sum_{2 \leq m \leq N} v_2(T_m) = O(N), \qquad \sum_{2 \leq m \leq N} v_{32}(T_m) = O(N),$$

wobei $v_{32}(m) = \lfloor v_2(m)/5 \rfloor$.

Beweis. Schreibe $m = r + 4x$ mit $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Für festes r gilt $T_m = f_r(x)$. Nach der Sublevel-Schätzung gibt es $C_r, \eta_r > 0$ mit

$$\#\{0 \leq x \leq X : f_r(x) \neq 0,\ v_2(f_r(x)) \geq s\} \leq C_r(X 2^{-\eta_r s} + 1).$$

Zudem ist $|T_m| \leq C\alpha^m$, also $v_2(T_m) = O(m)$ für $T_m \neq 0$. Deshalb genügt in der Identität

$$\sum_{0 \leq x \leq X} v_2(f_r(x)) = \sum_{s \geq 1} \#\{0 \leq x \leq X : v_2(f_r(x)) \geq s\}$$

die Summation bis $s = O(X)$. Somit

$$\sum_{0 \leq x \leq X} v_2(f_r(x)) \leq \sum_{s \leq C' X} C_r(X 2^{-\eta_r s} + 1) = O(X).$$

Summation über die vier Restklassen liefert $\sum_{2 \leq m \leq N} v_2(T_m) = O(N)$. Da $v_{32}(m) \leq v_2(m)$, folgt auch die zweite Aussage. □

Proposition 3.7 (Boundary-Avoidance)**.** *Boundary-Avoidance gilt für die kanonische Tribonacci-Folge.*

Beweis. Fixiere $[a, b]$, R und $j \in \{1, 2, 3\}$. Setze $q = 32^{k+a}$, wobei durch die Wahl von R im Bulk $k + a \geq 1$ gilt. Angenommen,

$$\operatorname{dist}(c\alpha^{n-j}, q\mathbb{Z}) \leq C_1 \rho^n.$$

Aus der Binet-Abschätzung folgt

$$|T_{n-j} - c\alpha^{n-j}| \leq C_1 \rho^n.$$

Also

$$\operatorname{dist}(T_{n-j}, q\mathbb{Z}) \leq 2C_1 \rho^n.$$

Für große n ist $2C_1\rho^n < 1/2$. Da T_{n-j} und die Elemente von $q\mathbb{Z}$ ganze Zahlen sind, ist der Abstand entweder 0 oder mindestens 1. Daher muss

$$q \mid T_{n-j}$$

gelten. Also

$$k + a \leq v_{32}(T_{n-j}).$$

Für jedes feste $m = n - j$ gibt es daher höchstens $v_{32}(T_m) + O_a(1)$ mögliche Werte k. Die endlich vielen kleinen n, für die $2C_1\rho^n \geq 1/2$, tragen nur $O(1)$ Paare bei. Insgesamt ist die Zahl der Boundary-bad pairs bis N höchstens

$$O(N) + \sum_{j=1}^{3} \sum_{n \leq N} v_{32}(T_{n-j}) = O(N).$$

Da $|\Delta_N(R)| \asymp N^2$, ist der relative Anteil $O(N)/O(N^2) = o(1)$. □

4 Von Binet-Sampling zu echter Bulk-Gleichverteilung

Definition 4.1 (Binet- und echte Vorgängerblöcke)**.** *Für ein festes Fenster $[a, b]$ der Länge $\ell = b - a + 1$ setze*

$$B_{a,b}(Y; k) = \left\lfloor \frac{Y}{32^{k+a}} \right\rfloor \pmod{32^\ell}.$$

Der echte dreizeilige Vorgängerblock ist

$$D_{n,k}^{[a,b]} = \big(B_{a,b}(T_{n-1}; k), B_{a,b}(T_{n-2}; k), B_{a,b}(T_{n-3}; k)\big),$$

der Binet-Haupttermblock ist

$$\widetilde{D}_{n,k}^{[a,b]} = \big(B_{a,b}(c\alpha^{n-1}; k), B_{a,b}(c\alpha^{n-2}; k), B_{a,b}(c\alpha^{n-3}; k)\big).$$

Hypothese 4.2 (Binet-Cylinder-Sampling, BCS)**.** *Für jedes feste Fenster $[a, b]$, jede Zylindermenge A im dreizeiligen Blockraum und jedes feste $R \geq R_0(a, b)$ gilt*

$$\frac{1}{|\Delta_N(R)|} \#\{(n, k) \in \Delta_N(R) : \widetilde{D}_{n,k}^{[a,b]} \in A\} \longrightarrow \frac{|A|}{32^{3\ell}}.$$

Definition 4.3 (Local-Cylinder-Bulk-Sampling, LCBS)**.** *Die Aussage* LCBS *ist dieselbe Konvergenz wie* BCS*, aber mit dem echten Block $D_{n,k}^{[a,b]}$ anstelle des Binet-Blocks $\widetilde{D}_{n,k}^{[a,b]}$.*

Proposition 4.4 (Binet-to-LCBS)**.** *Aus* BCS *folgt* LCBS*.*

Beweis. Fixiere $[a, b]$, A und R. Für $j = 1, 2, 3$ gilt

$$T_{n-j} = c\alpha^{n-j} + E_{n,j}, \qquad |E_{n,j}| \leq C_1\rho^n.$$

Der Blockwert $B_{a,b}(Y; k)$ kann sich unter einer Störung $|E| \leq C_1\rho^n$ nur ändern, wenn Y Abstand höchstens $C_1\rho^n$ zu einer Grenze $32^{k+a}\mathbb{Z}$ hat. Nach Boundary-Avoidance geschieht dies auf einer Menge relativer Dichte $o(1)$ in $\Delta_N(R)$. Daher unterscheiden sich die Indikatoren

$$1_A(D_{n,k}^{[a,b]}) \quad \text{und} \quad 1_A(\widetilde{D}_{n,k}^{[a,b]})$$

nur auf einer Menge relativer Dichte $o(1)$. Mittelung und Anwendung von BCS liefern LCBS. □

5 Carry-Reset-Mechanik und Normalität aus LCBS

Schreibe

$$T_n = \sum_{k \geq 0} d_k(n) 32^k, \qquad d_k(n) \in \{0, \ldots, 31\}.$$

Die Rekursion liefert ziffernweise

$$d_k(n) + 32c_{k+1}(n) = d_k(n-1) + d_k(n-2) + d_k(n-3) + c_k(n).$$

Lemma 5.1 (Carry-Menge)**.** *Für alle n, k gilt*

$$c_k(n) \in \{0, 1, 2\}.$$

Beweis. Der Anfangscarry ist 0. Ist $c_k(n) \in \{0, 1, 2\}$, dann gilt

$$d_k(n-1) + d_k(n-2) + d_k(n-3) + c_k(n) \leq 31 + 31 + 31 + 2 = 95.$$

Also ist der ausgehende Carry

$$c_{k+1}(n) = \left\lfloor \frac{d_k(n-1) + d_k(n-2) + d_k(n-3) + c_k(n)}{32} \right\rfloor$$

ein Element von $\{0, 1, 2\}$. Induktion über k beweist die Behauptung. □

Definition 5.2 (Reset)**.** *Setze*

$$S_k(n) = d_k(n-1) + d_k(n-2) + d_k(n-3).$$

Ein Reset an Position (n, k) liegt vor, wenn

$$S_k(n) \pmod{32} \notin \{30, 31\}.$$

Lemma 5.3 (Lokaler Reset)**.** *Liegt an (n, k) ein Reset vor, so ist $c_{k+1}(n)$ unabhängig von $c_k(n)$.*

Beweis. Schreibe $S_k(n) = 32q + r$ mit $0 \leq r \leq 31$. Dann

$$c_{k+1}(n) = q + \left\lfloor \frac{r + c_k(n)}{32} \right\rfloor.$$

Da $c_k(n) \in \{0, 1, 2\}$, kann der zweite Summand nur für $r = 30$ oder $r = 31$ vom eingehenden Carry abhängen. Für $r \notin \{30, 31\}$ ist er konstant gleich 0. □

Proposition 5.4 (No-Reset-Tail aus LCBS)**.** *Unter* LCBS *gilt: Für jedes feste $r \geq 1$ ist die relative Häufigkeit eines No-Reset-Runs der Länge r im Bulk gleich 16^{-r} im Grenzwert $N \to \infty$. Insbesondere gibt es eine exponentielle Tail-Schranke.*

Beweis. Ein No-Reset-Run der Länge r bedeutet, dass für $i = 0, \dots, r-1$

$$d_{k+i}(n-1) + d_{k+i}(n-2) + d_{k+i}(n-3) \pmod{32} \in \{30, 31\}.$$

Dies ist eine Zylinderbedingung an den dreizeiligen Vorgängerblock der Länge r. Für eine feste Position gibt es zu jedem Paar der ersten beiden Ziffern genau zwei dritte Ziffern, die die Summe 30 oder 31 modulo 32 ergeben. Also ist der Anteil erlaubter Tripel

$$\frac{2 \cdot 32^2}{32^3} = \frac{1}{16}.$$

Für r Positionen ist der Zylinderanteil 16^{-r}. Anwendung von LCBS auf diesen Zylinder liefert die Behauptung. □

Lemma 5.5 (Lokale Additionsbalance)**.** *Sei $q = 32^{\ell}$, $\kappa \in \{0, 1, 2\}$ und $w \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Dann gibt es genau q^2 Tripel $(A, B, C) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^3$ mit*

$$A + B + C + \kappa \equiv w \pmod{q}.$$

Beweis. Für jedes Paar $(A, B) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$ ist

$$C \equiv w - \kappa - A - B \pmod{q}$$

eindeutig bestimmt. Daher gibt es genau q^2 Lösungen. □

Lemma 5.6 (Determinierter Eintrittscarry nach einem Reset)**.** *Fixiere einen Vergangenheitsradius $R \geq 1$. Sei das dreizeilige Vorgängerwort auf den relativen Positionen $-R, \dots, -1$ gegeben, also die Ziffern von $T_{n-1}, T_{n-2}, T_{n-3}$ auf diesen Positionen relativ zum Blockanfang k. Wenn in diesem Vergangenheitsfenster mindestens ein Reset liegt, dann ist der Eintrittscarry $c_k(n)$ am Blockanfang durch dieses dreizeilige Vergangenheitswort eindeutig bestimmt und unabhängig von jedem Carry vor der letzten Resetposition.*

Beweis. Wähle die letzte Resetposition $k - r$ im Intervall $[k - R, k - 1]$. Nach Lemma 5.3 ist der ausgehende Carry an dieser Position unabhängig vom eingehenden Carry und wird nur durch die dortige Ziffernsumme bestimmt. Von der nächsten Position bis zum Blockanfang k wird der Carry durch die Rekursion

$$d_h(n) + 32c_{h+1}(n) = d_h(n-1) + d_h(n-2) + d_h(n-3) + c_h(n)$$

deterministisch aus dem jeweils vorherigen Carry und den bekannten dreizeiligen Vorgängerziffern fortgeschrieben. Also ist $c_k(n)$ eine Funktion des gegebenen Vergangenheitswortes. □

Proposition 5.7 (Bulk-Blockgleichverteilung aus LCBS)**.** *Unter* LCBS *gilt für jedes feste Wort W der Länge ℓ, dass die relativen Häufigkeiten der Bulk-Vorkommen von W gegen $32^{-\ell}$ konvergieren, im iterierten Grenzübergang $N \to \infty$, danach Vergangenheitsradius $R \to \infty$.*

Beweis. Fixiere $R > \ell$. Zerlege den Bulk in Paare, bei denen im Intervall $[k - R, k - 1]$ mindestens ein Reset liegt, und in Paare ohne solchen Reset. Nach dem No-Reset-Tail hat die zweite Menge im Grenzwert relativen Anteil $O(16^{-R})$.

Auf der ersten Menge bestimmt der letzte Reset vor k den Eintrittscarry am Anfang des ℓ-Blocks als Funktion des endlichen Vergangenheitswortes. Fixiert man dieses Vergangenheitswort, so ist der Eintrittscarry κ fest. Nach der lokalen Additionsbalance erzeugt genau der Anteil $32^{-\ell}$ aller zukünftigen dreizeiligen Vorgängerblöcke den Outputblock W. Da LCBS auf dem kombinierten Fenster aus Vergangenheit und Zukunft gilt und es für festes R nur endlich viele Vergangenheitswörter gibt, folgt die bedingte Häufigkeit $32^{-\ell}$ nach Summation über alle Reset-Vergangenheiten. Der Fehler durch die No-Reset-Menge ist $O(16^{-R})$ und verschwindet für $R \to \infty$. □

Satz 5.8 (BCS impliziert Normalität von T_{32})**.** *Angenommen* BCS *gilt. Dann ist die Tribonacci-Konkatenation T_{32} normal in Basis 32.*

Beweis. Nach Proposition 4.4 gilt aus BCS die Aussage LCBS. Nach der vorherigen Proposition folgt die Bulk-Blockgleichverteilung für jedes feste Wort W. Es bleibt, Nahtstellen und Ränder zu vernachlässigen.

Bis Index N ist die Gesamtlänge

$$\sum_{n \le N} L_n = \frac{1}{2}(\log_{32} \alpha) N^2 + O(N).$$

Ein Wort der Länge ℓ kann eine Nahtstelle zwischen $(T_n)_{32}$ und $(T_{n+1})_{32}$ nur an höchstens $\ell - 1$ Startpositionen überqueren. Insgesamt gibt es daher nur $O_\ell(N)$ Nahtstellenbeiträge. Die ersten und letzten R Positionen jedes Blocks liefern weitere $O_R(N)$ Randbeiträge. Relativ zur Gesamtlänge $\asymp N^2$ verschwinden beide Beiträge. Da $|\Delta_N(R)|$ für festes R asymptotisch die Gesamtlänge ausschöpft, überträgt sich die Bulk-Gleichverteilung auf die gesamte Konkatenation. Also besitzt jedes Wort W der Länge ℓ Grenzhäufigkeit $32^{-\ell}$. Da W beliebig war, ist T_{32} normal in Basis 32. □

6 Der aktuelle offene digitale Kern

Der vorherige Teil zeigt vollständig:

$$\text{BCS} \Longrightarrow \text{Normalität von } T_{32}.$$

Die verbleibende Aufgabe ist also, BCS zu beweisen. Die nachfolgenden digitalen Aussagen werden in dieser Kernfassung nicht als bewiesene Sätze ausgegeben, sondern als offenes Reduktionspaket formuliert. Ihr Zweck ist, den Sampling-Schritt BCS auf digitale Strukturvermeidung für

$$\varepsilon = \log_{32}(\alpha/2)$$

zurückzuführen.

Hypothese 6.1 (Digitales Reduktionspaket DRP)**.** *Das digitale Reduktionspaket* DRP *ist eine offene Makro-Hypothese über die digitale Struktur von*

$$\varepsilon = \log_{32}(\alpha/2).$$

Es wird in dieser Arbeit ausschließlich kontrapositiv verwendet. Es besagt:

$$\neg\text{BCS} \quad \Longrightarrow \quad R_{\text{known}} \ \vee \ \mathcal{L}_{\text{FD}},$$

wobei $\mathcal{L}_{\text{FD}}$ einen nichtdegenerierten, FD-HCLA*-triggernden digitalen Listenkompressionsverstoß mit admissibler subexponentieller Anfangsliste bezeichnet. Mit anderen Worten: Wenn der*

Binet-Cylinder-Sampling-Kern scheitert, dann liegt entweder ein ausgewiesener Restfall aus R_{known} *vor, oder das Scheitern erzeugt genau den fixed-denominator Listenkompressionszweig, auf den* FD-HCLA *und der Baker-Schluss angewendet werden können.*

Dabei ist DRP *keine in diesem Dokument bewiesene Direktbrücke, sondern die ausdrücklich offene digitale Brücke von der* ε*-Struktur zum benötigten Binet-Cylinder-Sampling.*

Bemerkung 6.2 (Rolle des digitalen Pakets)**.** *Das Paket* DRP *ist eine bewusste Abkürzung für den offenen digitalen Teil der Reduktion. Es soll nicht suggerieren, dass die kontrapositive Rückführung eines möglichen Scheiterns von* BCS *in wenigen Zeilen bewiesen wäre. Der vollständig bewiesene Teil dieser Arbeit beginnt erst nach Annahme von* BCS*. Ein Leser kann die vorliegende Arbeit daher als sauberen Beweis von* BCS $\Rightarrow$ *Normalität und als präzise Formulierung der verbleibenden digitalen Brücke lesen.*

7 FD-HCLA und seine vier Audit-Bausteine

Der wichtigste offene Kern des digitalen Pakets ist FD-HCLA. Er soll ausdrücken: Eine admissible lokale Listenkompression für Ziffern von ε muss im freien Hauptfall denselben alten Nennerkandidaten immer weiter rechts fortsetzen. Dadurch entstünde eine extrem gute rationale Approximation an ε mit altem Nenner; Baker-Wüstholz schließt solche Approximationen aus.

Definition 7.1 (Fixed-Denominator Height-Coherence Amplification)**.** FD-HCLA *bedeutet: Für jede aus der relevanten digitalen Fenstergeometrie stammende admissible subexponentielle Anfangsliste*

$$\mathcal{P}_P^{(0)} \subseteq \{0, \dots, 32^{Q_0} - 1\}, \qquad |\mathcal{P}_P^{(0)}| \leq 32^{o(Q_0)},$$

die den tatsächlichen alten Kandidaten p_0 *enthält und aus einem verbotenen digitalen Listenkompressionsszenario stammt, gibt es im freien Hauptfall eine Konstante* $\kappa > 0$ *und für jedes feste* $J \geq 1$ *geschachtelte Listen*

$$\mathcal{P}_P^{(J)} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{P}_P^{(0)}, \qquad p_0 \in \mathcal{P}_P^{(J)}, \qquad |\mathcal{P}_P^{(J)}| \leq 32^{o_J(Q_0)},$$

wobei $o_J(Q_0) = o(Q_0)$ *für jedes feste* J*, und Höhen*

$$Q_J \geq Q_0 + J\kappa Q_0$$

mit

$$\left| \varepsilon - \frac{p_0}{32^{Q_0}} \right| \leq 32^{-Q_J}.$$

Jeder Iterationsschritt gewinnt also mindestens κQ_0 *zusätzliche kontrollierte Ziffern relativ zum alten Nenner. Der Nenner bleibt immer der alte Nenner* 32^{Q_0}*. Triviale oder nachträglich aus den Ziffern von* ε *gewählte Listen sind nicht gemeint.*

Definition 7.2 (Bekannte Restklasse und Strukturkontrollen)**.** *Die Sammelklasse* R_{known} *umfasst die folgenden offenen Strukturkontrollen und Restfälle.*

(i) Auswahl- und Informationsdefekte (ASP^{+})*: Eine benötigte Fensterfamilie, Unterliste oder Fortsetzung wird nicht* ε*-blind aus den zulässigen Daten konstruiert, sondern würde Information über die tatsächlichen Ziffern von* ε *nachträglich verwenden.*

(ii) Boundary-, Extremblock-, Carry-unclean- und Self-Overlap-Reste*: Die digitale Fensterstruktur wird durch Randlagen, lange nicht gereinigte Carry-Bereiche oder Wiederverwendung derselben Ziffernpositionen bestimmt.*

(iii) Degenerationsquotienten*: Es treten exakte algebraische oder digitale Relationen zwischen den sparse Parametern auf, so dass der freie Hauptfall nicht mehr vorliegt.*

(iv) Augmentierte Rangkollapse (RCC)*: Die relevanten Start-, Shift- oder Kompatibilitätsparameter liegen in einer niedrigdimensionalen augmentierten Struktur.*

(v) Transduktor-/Synchronisationsreste*: Die benötigte Kompression wird durch nicht separat kontrollierte endliche Transduktor- oder Synchronisationsstrukturen getragen.*

Tritt ein solcher Fall auf, verlässt man den freien Hauptfall; er wird nicht als Beweis von FD-HCLA *gewertet. Die vorliegende Arbeit beweist diese Strukturkontrollen nicht, sondern führt sie als offene Voraussetzungen des digitalen Pakets.*

Hypothese 7.3 (LBDL: Local Bulk Density)**.** *Aus einer admissiblen positiven Bulk-Dichte von Fensterstarts folgt lokale Bulk-Dichte auf makroskopischen Bulk-Intervallen, oder ein Fall aus R_{known} tritt auf.*

Hypothese 7.4 (FDAL: Fixed-Denominator Attachment)**.** *Jede height-coherent Fensterkette, die im freien Hauptfall von der aktuellen kontrollierten Höhe Q_j bis zu einer Höhe $Q_{j+1} \geq Q_j + \kappa Q_0$ reicht, ist an denselben alten Nennerkandidaten $p_0/32^{Q_0}$ angeschlossen; andernfalls tritt ein Fall aus R_{known} auf.*

Hypothese 7.5 (SULC: Summed Uniform List Complexity)**.** *Für jede admissible fixed-denominator-attached Kette mit lokalen Listen $\mathcal{C}_i$ gilt*

$$\sum_i \log_{32} |\mathcal{C}_i| = o(Q_0),$$

oder ein Fall aus R_{known} tritt auf.

Hypothese 7.6 (ITL: Iterability)**.** *Nach einem erfolgreichen fixed-denominator-Verstärkungsschritt ist die überlebende Liste wieder eine admissible subexponentielle Anfangsliste derselben Klasse, so dass* LBDL*,* FDAL *und* SULC *erneut angewandt werden können; andernfalls tritt ein Fall aus R_{known} auf.*

8 Rekonstruktion von FD-HCLA aus den vier Bausteinen

Satz 8.1 (FD-HCLA-Rekonstruktion)**.** *Angenommen,* LBDL*,* FDAL*,* SULC *und* ITL *gelten im freien Hauptfall, und kein Fall aus R_{known} tritt auf. Dann gilt* FD-HCLA*.*

Beweis. Sei $\mathcal{P}_P^{(0)}$ eine admissible subexponentielle Anfangsliste auf Höhe Q_0, und sei $p_0 \in \mathcal{P}_P^{(0)}$ der tatsächliche alte Kandidat.

Nach LBDL besitzt die zugrunde liegende Fensterstartfamilie im freien Hauptfall lokale Bulk-Dichte. Da die Fenster Länge $N_P \asymp P$ haben, liefert lokale Bulk-Dichte height-coherent Fensterketten, die einen rechten Höhenbereich erreichen. Andernfalls läge nach LBDL ein Fall aus R_{known} vor, was ausgeschlossen ist.

Wähle eine solche Kette bis zu einer Höhe $Q_1 \geq Q_0 + \kappa Q_0$. Nach FDAL ist die Kette im freien Hauptfall fixed-denominator-attached an den alten Nenner 32^{Q_0}. Also kann man für jeden alten Kandidaten prüfen, ob er eine kompatible Fortsetzung bis Q_1 besitzt.

Nach SULC ist die Zahl kompatibler Fortsetzungen eines festen alten Kandidaten höchstens

$$\prod_i |\mathcal{C}_i| = 32^{o(Q_0)}.$$

Definiere

$$\mathcal{P}_P^{(1)} = \{p \in \mathcal{P}_P^{(0)} : p \text{ besitzt eine admissible kompatible Fortsetzung bis } Q_1\}.$$

Dann ist

$$\mathcal{P}_P^{(1)} \subseteq \mathcal{P}_P^{(0)},$$

und der tatsächliche Kandidat p_0 liegt in $\mathcal{P}_P^{(1)}$. Da $\mathcal{P}_P^{(1)}$ eine Teilmenge von $\mathcal{P}_P^{(0)}$ ist, bleibt sie subexponentiell. Wegen der fixed-denominator-Anbindung gilt

$$\left|\varepsilon - \frac{p_0}{32^{Q_0}}\right| \le 32^{-Q_1}.$$

Nach ITL ist $\mathcal{P}_P^{(1)}$ wieder eine admissible subexponentielle Anfangsliste derselben Klasse, solange kein Fall aus R_{known} auftritt. Da solche Fälle ausgeschlossen sind, können LBDL, FDAL und SULC erneut angewandt werden. So erhält man eine Liste

$$\mathcal{P}_P^{(2)} \subseteq \mathcal{P}_P^{(1)}$$

mit $p_0 \in \mathcal{P}_P^{(2)}$, $|\mathcal{P}_P^{(2)}| \le 32^{o_2(Q_0)}$, eine Höhe $Q_2 \ge Q_1 + \kappa Q_0$ und

$$\left|\varepsilon - \frac{p_0}{32^{Q_0}}\right| \le 32^{-Q_2}.$$

Induktion liefert für jedes feste J geschachtelte Listen

$$\mathcal{P}_P^{(J)} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{P}_P^{(0)},$$

mit $p_0 \in \mathcal{P}_P^{(J)}$, $|\mathcal{P}_P^{(J)}| \le 32^{o_J(Q_0)}$, Höhen

$$Q_J \ge Q_0 + J\kappa Q_0,$$

und

$$\left|\varepsilon - \frac{p_0}{32^{Q_0}}\right| \le 32^{-Q_J}.$$

Dies ist genau FD-HCLA. □

9 Baker-Wüstholz und der fixed-denominator-Schluss

Satz 9.1 (Baker-Wüstholz, verwendete Form)**.** *Seien γ_1, γ_2 nichtnull algebraisch und multiplikativ unabhängig. Dann gibt es zu gewählten Logarithmen $\log\gamma_1, \log\gamma_2$ eine Konstante $C > 0$, so dass für alle ganzen m, n, nicht beide null, die nichtverschwindende Linearform*

$$\Lambda = m\log\gamma_1 + n\log\gamma_2$$

eine untere Schranke

$$|\Lambda| \ge H^{-C}, \qquad H = \max\{|m|, |n|, 3\},$$

erfüllt.

Lemma 9.2 (Baker-Ausschluss für ε)**.** *Setze $\gamma_1 = \alpha/2$ und $\gamma_2 = 32$. Es gibt eine Konstante $C_{\text{Bak}} > 0$, so dass für alle hinreichend großen Q und alle ganzen p, sofern keine exakte multiplikative Degeneration zwischen γ_1 und γ_2 vorliegt,*

$$\left|\varepsilon - \frac{p}{32^Q}\right| \ge 32^{-C_{\text{Bak}}Q}.$$

Beweis. Es gilt
$$\varepsilon = \frac{\log(\alpha/2)}{\log 32}.$$
Angenommen,
$$\left|\varepsilon - \frac{p}{32^Q}\right| < 1.$$
Dann ist $|p| \ll 32^Q$. Multiplizieren mit $32^Q \log 32$ liefert die lineare Form
$$\Lambda = 32^Q \log(\alpha/2) - p \log 32.$$
Wenn $\Lambda = 0$, dann gilt
$$(\alpha/2)^{32^Q} = 32^p,$$
also eine exakte multiplikative Abhängigkeit zwischen γ_1 und γ_2. Dieser Fall ist der Degenerationsfall. Er kann für die konkrete Tribonacci-Konstante auch direkt ausgeschlossen werden: Aus der Gleichung folgte, dass eine Potenz von α rational ist; wegen der nichttrivialen Konjugaten von α ist dies mit dem Minimalpolynom $x^3 - x^2 - x - 1$ unverträglich. Für die Logik dieser Arbeit genügt es, den Fall als Degeneration zu markieren. Außerhalb dieses Falls ist $\Lambda \neq 0$. Baker-Wüstholz liefert
$$|\Lambda| \geq H^{-C}, \qquad H \ll 32^Q.$$
Also
$$|\Lambda| \geq 32^{-C'Q}$$
für eine Konstante C'. Da
$$\left|\varepsilon - \frac{p}{32^Q}\right| = \frac{|\Lambda|}{32^Q \log 32},$$
folgt
$$\left|\varepsilon - \frac{p}{32^Q}\right| \geq 32^{-(C'+1)Q} \cdot (\log 32)^{-1}.$$
Nach Vergrößerung der Konstante erhält man die behauptete Form. □

Proposition 9.3 (Baker-Ausschluss des FD-HCLA-Listenkompressionszweigs)**.** *Angenommen* FD-HCLA *gilt und Degenerationsfälle sind ausgeschlossen. Dann kann kein nichtdegenerierter,* FD-HCLA*-triggernder digitaler Listenkompressionsverstoß mit admissibler subexponentieller Anfangsliste für unbeschränkt viele Q_0 bestehen.*

Beweis. Ein solcher Listenkompressionsverstoß würde nach FD-HCLA für jedes feste J denselben alten Nennerkandidaten $p_0/32^{Q_0}$ liefern mit
$$\left|\varepsilon - \frac{p_0}{32^{Q_0}}\right| \leq 32^{-(Q_0 + J\kappa Q_0)}.$$
Wähle J so groß, dass $1 + J\kappa > C_{\mathrm{Bak}}$. Für große Q_0 widerspricht dies der Baker-Schranke des vorherigen Lemmas, sofern keine Degeneration vorliegt. □

10 Konditionaler Hauptsatz der Kernfassung

Satz 10.1 (Konditionaler Hauptsatz)**.** *Angenommen, das digitale Reduktionspaket* DRP *gilt. Angenommen weiter, im freien Hauptfall gelten* LBDL*,* FDAL*,* SULC *und* ITL*, und kein Fall aus R_{known} tritt auf. Dann ist T_{32} normal in Basis 32.*

Beweis. Aus LBDL + FDAL + SULC + ITL und $\neg R_{\text{known}}$ folgt nach dem Rekonstruktionstheorem FD-HCLA. Wir zeigen zunächst BCS durch Widerspruch. Angenommen, BCS scheitert. Nach der kontrapositiven Makro-Hypothese DRP gilt dann entweder ein Fall aus R_{known}, oder es entsteht ein nichtdegenerierter, FD-HCLA-triggernder digitaler Listenkompressionsverstoß. Der erste Fall ist durch $\neg R_{\text{known}}$ ausgeschlossen. Der zweite Fall ist nach Proposition 9.3 durch FD-HCLA und Baker-Wüstholz ausgeschlossen. Also kann BCS nicht scheitern. Damit gilt BCS. Nach Satz 5.8 folgt daraus die Normalität von T_{32} in Basis 32. □

11 Was bleibt offen?

Diese Arbeit isoliert die offene Last auf zwei Ebenen.

Erste Ebene: die digitale Brücke. Das Paket DRP ist nicht bewiesen. Es fasst die offene kontrapositive digitale Brücke zusammen: Ein Scheitern von BCS soll entweder einen Fall aus R_{known} oder einen FD-HCLA-triggernden Listenkompressionsverstoß erzeugen.

Zweite Ebene: der FD-HCLA-Kern. Selbst wenn DRP akzeptiert wird, bleibt die lokale Verifikation von

$$\text{LBDL}, \qquad \text{FDAL}, \qquad \text{SULC}, \qquad \text{ITL}$$

im konkreten digitalen Ursprung offen.

Die am ehesten direkt angreifbare Stelle ist LBDL: Globale admissible Bulk-Dichte muss in lokale Bulk-Dichte überführt werden, oder das Scheitern muss zwingend als Auswahlkosten-, Boundary-, Self-Overlap-, Degenerations- oder Rangkollapsfall erscheinen.

12 Status-Tabelle

Baustein	Status	Bedeutung
Binet-Abschätzung	bewiesen	Wachstum und Längenformel
Boundary-Avoidance	bewiesen	Binet-Fehler ändert Bulk-Zylinder selten
BCS $\Rightarrow$ LCBS	bewiesen	Binet-Sampling wird echtes Sampling
LCBS $\Rightarrow$ Normalität	bewiesen	Carry-Reset und lokale Balance
DRP	offene Brücke	Kontraposition: $\neg\text{BCS} \Rightarrow R_{\text{known}} \vee \mathcal{L}_{\text{FD}}$
FD-HCLA	offen	fixed-denominator Listenverstärkung für ε
LBDL, FDAL, SULC, ITL	offen/lokal	Audit-Bausteine von FD-HCLA
Baker-Wüstholz	extern	schließt zu gute alte-Nenner-Approximationen aus

Schlussstatus

Der belastbare Kern dieser Fassung ist:

$$\boxed{\text{BCS} \Longrightarrow \text{Normalität von } T_{32}.}$$

Der aktuelle offene Forschungsstand ist:

$$\boxed{\text{FD-HCLA und seine Bausteine betreffen } \varepsilon = \log_{32}(\alpha/2) \text{, nicht die Tribonacci-Ziffern direkt.}}$$

Das Dokument ist damit keine vollständige Lösung, sondern eine bereinigte Kernreduktion mit klar getrennten Voraussetzungen.